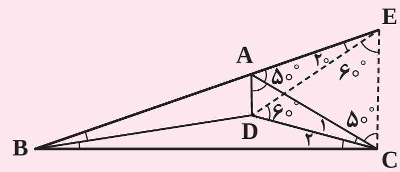
پاسخ پرسش‌های پیکارجو

۱.



AB را از طـرف A تـا نقطهٔ E امتـداد می‌دهیم، به‌طوری که داشـته باشـیم: BE=BC. E را به D و C وصل می‌کنیم. مثلث BEC متساوی‌الساقین است و در نتیجه:

$$B\hat{E}C = B\hat{C}E = \frac{۱۸۰-۲۰}{۲} = ۸۰^\circ \Rightarrow A\hat{C}E = ۵۰^\circ$$

همچنین BD نیمساز زاویهٔ رأس مثلث متساوی‌الساقین BEC و در نتیجــه ارتفاع، میانه و عمودمنصف EC اســت. لذا: DE=DC. یعنی مثلث DEC متساوی‌الساقین است و چون: $D\hat{C}E = ۶۰^\circ$، پس متساوی‌الاضلاع است؛ یعنی:

$$DE = DC = EC,\ \ D\hat{E}C = E\hat{D}C = ۶۰^\circ \Rightarrow D\hat{E}A = ۲۰^\circ$$

$$\Delta AEC : C\hat{A}E = ۱۸۰-(۵۰+۸۰) = ۵۰^\circ \Rightarrow AE = EC$$

و چــون: ED=EC، پس: DE=AE. یعنی مثلث EAD در رأس E متساوی‌الساقین است و در نتیجه:

$$\alpha + ۵۰ = \frac{۱۸۰-۲۰}{۲} = ۸۰ \Rightarrow \alpha = ۳۰^\circ$$ (گزینهٔ الف)

۲. با توجه به فرض y=۲-x و با جای‌گذاری در کسر فوق داریم:

$$m = \frac{x^۳ + ۲x(۲-x)^۲ + ۳(۲-x)^۳}{x^۲ + (۲-x)^۲}$$

و پس از ساده شدن:

$$m = \frac{۵x^۲ - ۱۴x + ۱۲}{x^۲ - ۲x + ۲}$$

و از آنجا:

$$۵x^۲ - ۱۴x + ۱۲ = mx^۲ - ۲mx + ۲m$$
$$\Rightarrow (۵-m)x^۲ + (۲m-۱۴)x + (۱۲-۲m) = ۰$$
$$\Delta = (۲m-۱۴)^۲ - ۴(۵-m)(۱۲-۲m) \geq ۰$$

و از حل این نامعادله نتیجه می‌شود:

$$-۴-\sqrt{۵} \leq m \leq -۴+\sqrt{۵}$$ (گزینهٔ د)

۳. می‌دانیــم که مجموع ارقام یک عدد، با خود آن عدد به پیمانهٔ ۹ هم‌نهشت است. بنابراین باقی‌ماندهٔ تقسیم این عدد را بر ۹ به‌دست می‌آوریم:

$$۱۳۹۶ \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۱۳۹۶^{۱۳۹۶} \overset{۹}{\equiv} ۱ \Rightarrow n = ۹k+۱$$
$$\Rightarrow ۳^n = ۳^{۹k+۱} = (۳^۳)^{۳k} \times ۳ = (۲۷)^{۳k} \times ۳$$
$$\Rightarrow ۳^n \overset{۲۶}{\equiv} ۳$$ (گزینهٔ ج)

۴. اگر این عدد را با نماد $\overline{abcde}$ نمایش دهیم، باید داشته باشیم:

$$\overline{abcde} = ۱۳۹۶e + r, ۰ \leq r < ۱۳۹۶$$

واضح است که اگر e≤۶، ۱۳۹۶e+r عددی چهاررقمی می‌شود. پس باید داشــته باشــیم: ۷≤e≤۹. اگر e=۷ باشد: ۷×۱۳۹۶=۹۷۷۲ و برای اینکه ۱۳۹۶e+r عددی پنج‌رقمی بشــود، باید داشته باشیم: r≥۲۲۸ و با توجه به رقم یکان این عدد، باید: r≥۲۳۵ و در نتیجه:

$$r \in \{۲۳۵, ۲۴۵, ..., ۱۳۹۵\}$$

که یعنی ۱۱۷ جواب برای r وجود دارد.

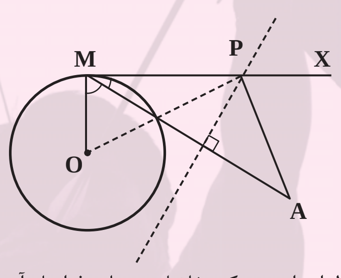
اگر e=۸ باشــد، داریم: ۸×۱۳۹۶=۱۱۱۶۸. با توجه به رقم یکان این عدد باید داشته باشیم: r≥۰ و در نتیجه:

$$r \in \{۰, ۱۰, ..., ۱۳۹۰\}$$

پس ۱۴۰ جواب هم از اینجا به‌دست می‌آید. اگر e=۹ هم باشد، به روشی مشابه ۱۴۰ جواب دیگر به‌دست می‌آید. بنابراین در مجموع ۳۹۷ عدد پنج‌رقمی به‌دست می‌آید (گزینهٔ د)

۵. اگر P نقطهٔ برخورد عمودمنصف AM و مماس Mx باشد، با توجه به ویژگی عمودمنصف و عمودبودن شــعاع OM بر مماس Mx و قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$OM^۲ + MP^۲ = OP^۲, MP = AP$$
$$\Rightarrow OM^۲ + AP^۲ = OP^۲ \Rightarrow OP^۲ - AP^۲ = OM^۲ = R^۲$$



یعنی P نقطه‌ای اســت که تفاضل مربعات فواصل آن از دو نقطهٔ ثابت A و O مقداری ثابت اســت و بنابراین مکان هندســی P خط راستی عمود بر OA است.